

栗まんじゅう問題の考察

篠永 康平

ドラえものの有名な道具の一つに、「バイバイン」というものがある。
これは液体状の薬品で、物体に1滴振り掛けると、その物体の個数が5分ごとに2ⁿ個に増殖する。
食べ物の場合は、食べるなどして元の形が崩れると、それ以上の増殖はない。
5分ごとに2倍に増えるので、30分で64個、1時間で4096個、2時間で16777216個になる。
のび太はこの道具を使って栗まんじゅうを増やしたが、増えすぎて食べられなくなってしまった。
そのためドラえもんがロケットで宇宙に飛ばして投棄した。この栗まんじゅうについて2つの謎がある。

1つ目の疑問は「バイバイン」という名称が日本語なのか、それとも英語なのか、という疑問。
「バイバイン」という名称は、日本語の「倍々」という言葉から来ているようにも聞こえるし、
それぞれ「2倍」、「2進法」を意味する英単語「bi」、「bin」をくっつけてつくった造語「bi-bin」とも考えられる。

2つ目の疑問は、投棄された栗まんじゅうが宇宙の彼方で増え続けたらどうなるのか、という疑問。
議論が進まないのバイバインによる増殖が「質量保存の法則に反している」というツッコミは無しにしよう。

ドラえもんが飛ばしたロケットが光速近くまで加速する性能があるならば、ウラシマ効果によりロケット内の時間の経過が0に近づき、地球から見れば栗まんじゅうの増殖は止まったように見えることになる。こうなら問題ない。
しかし、もしロケットにそれほどの性能がなければ、どうなるのだろうか。

$8 = 2^3$ より、3回分裂すると栗まんじゅう球の半径は2倍になる。すなわち、半径は15分ごとに2倍になる。
滋賀県の某社製の栗まんじゅうは、質量は45g、体積は49 cm³ であった。
また、この栗まんじゅうは0.650 kgf (= 6.37N) の力を受けるとへこむことが判明した。
以下では、計算しやすいようにするため、栗まんじゅうの質量は50g、体積は50 cm³ の球であるとして計算する。
また、10Nの力を受けるとつぶれるものと考えて計算する。
体積は50 cm³ の球の半径は2.3 cmである。すると、相対論の影響を無視する場合、ある時間における半径 r は、

$$r = 0.023 \cdot 2^{\frac{t}{900}} \quad [r \text{ の単位はメートル、} t \text{ の単位は秒}] \quad \cdots (1) \quad \text{とおける。}$$

これに具体的な数値を代入すると、半径は2時間後に6.9m、4時間後に1.8km、7時間で地球半径を超え、23時間30分後に観測可能な宇宙の半径を超えてしまう。

一方、増殖前の質量は50 g = 0.05 kg なので、ある時間における質量 $m(t)$ は、

$$m(t) = 0.05 \cdot 2^{\frac{t}{300}} \quad \cdots (2) \quad \text{とおける。}$$

劇中でドラえもんは「栗まんじゅうならば、食べると増殖は止まる」と言っていたので、質量はたとえ相対性理論の作用により体積増加が抑えられても、栗まんじゅうが物理的・化学的に消滅しない限り、式(2)のペースで倍々に増え続けるものとする。

なお、栗まんじゅう球が巨大化していくその速度を「膨張速度」と呼ぶことにする。

分裂速度は、式(1)の r を t で微分することにより求められる。つまり、

$$r' = \frac{0.023 \cdot \ln 2}{900} \cdot 2^{\frac{t}{900}} \quad [\ln \text{ は自然対数}] \quad \cdots (3)$$

以下の文章での数式では、式を見やすくするために、定数部 $\frac{0.023 \cdot \ln 2}{900}$ を a と表記する。

式(3)に具体的な数値を代入すると、膨張速度は 5 時間 45 分後に新幹線の最高速度を超え、6 時間 15 分後に音速に達する。そして、11 時間後に光速に到達する。こうなると相対論の影響を無視できなくなる。

このまま相対論による影響を考慮した数式をつくるのは難しいので、三角関数の力を借りよう。

まず、光速を 1 として、速度は光速に対する比率で表す。

例えば、0.6 というのは、光速の 60% という速度を表す。これを単純に「**0.6 光速比**」と書き表す。

一定の加速度で加速していく宇宙船は、いつかは光速度に達してしまうが、これを相対論の影響を考慮して考えると、以下のようなグラフになる。(図 1)

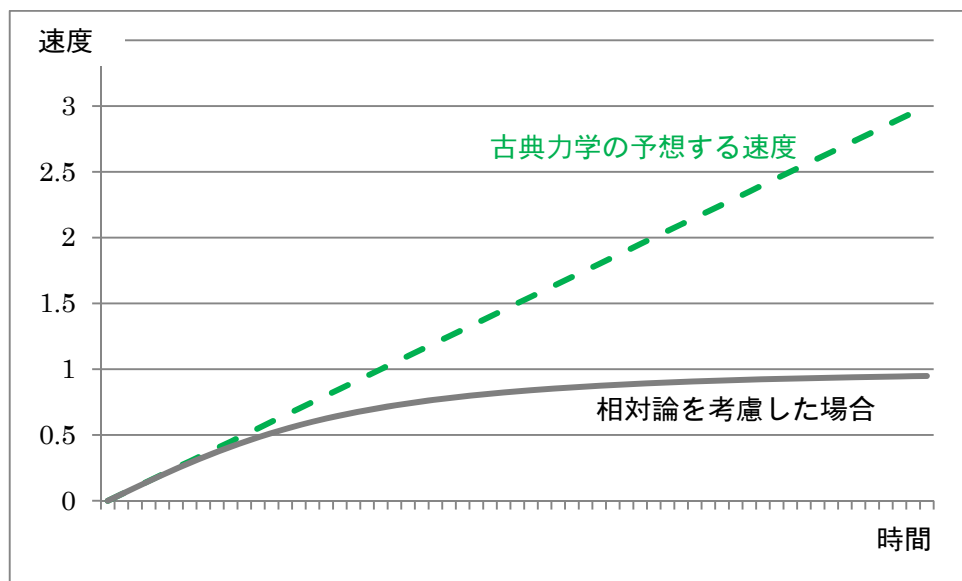


図 1 加速度運動する、ある宇宙船の速度（縦軸は速度[光速比]、横軸は時間）

点線が相対論を無視した場合に予測される速度、実線は相対論を考慮した場合に予測される速度である。

ここで、相対論の影響を無視した場合に予測される速度を $\tan \theta$ とおくと、相対論の影響を考慮した速度は $\sin \theta$ と書ける。

また、ローレンツ収縮による物体の大きさの変化は $\cos \theta$ 、時間の遅れは $\frac{\tan \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\cos \theta}$ と書ける。

上記の事項を図にまとめると以下のようなになる。

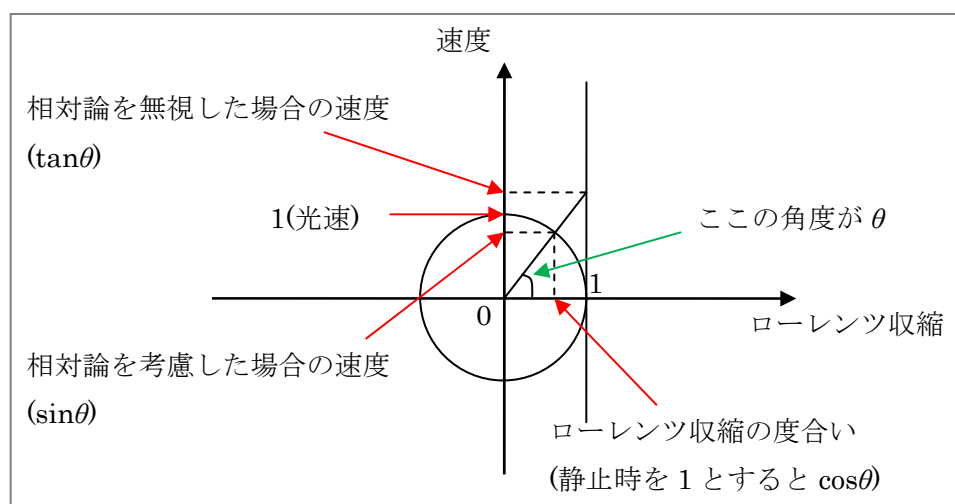


図 2 相対論を無視した場合の速度、考慮した場合の速度の間に成り立つ相互関係（概念図）

この相互関係は、物体がローレンツ収縮により $\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ 倍に縮むことなどから導き出される。

つまり、相対論の影響を無視した場合に予測される速度から、相対論の影響を考慮した速度へ変換するためには、 $\arctan$ と $\sin$ の合成関数を使えばよい。

よって、相対論の影響を考慮した分裂速度は、下記の式になる。

$$v(t) = c \sin \left\{ \arctan \left(\frac{a \cdot 2^{\frac{t}{900}}}{c} \right) \right\} = \frac{a \cdot 2^{\frac{t}{900}}}{\sqrt{1 + \left(ac^{-1} \cdot 2^{\frac{t}{900}} \right)^2}} \quad [c \text{ は光速}] \quad \cdots (4) \quad (\text{※1})$$

これをグラフにすると以下ようになる。

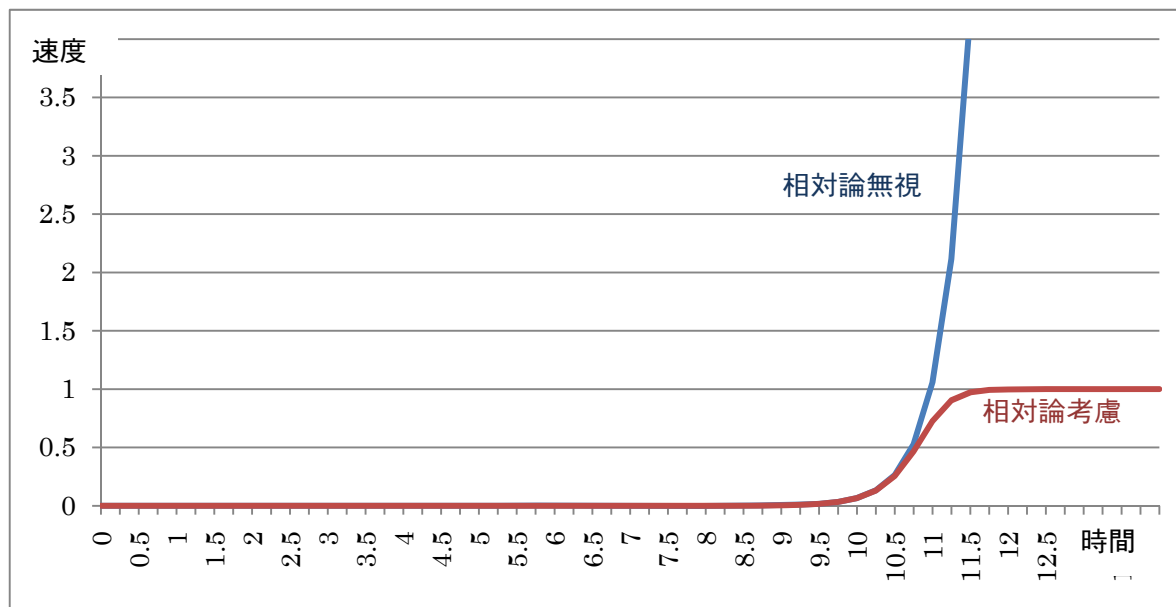


図3 栗まんじゅうの分裂速度（注：速度の単位は「光速比」、時間の単位は「時間」）

このように分裂速度は光速に収束していく。そのため体積の増加も抑制される。

式(4)を、積分定数を0として積分することで半径を計算する式を作れる。

$$r(t) = \int v(t) dt = \int \frac{a \cdot 2^{\frac{t}{900}}}{\sqrt{1 + \left(ac^{-1} \cdot 2^{\frac{t}{900}} \right)^2}} dt = \frac{900c}{\ln 2} \cdot \ln \left(\frac{a \cdot 2^{\frac{t}{900}}}{c} + \sqrt{1 + \left(\frac{a \cdot 2^{\frac{t}{900}}}{c} \right)^2} \right) \quad \cdots (5) \quad (\text{※2})$$

これを利用すると、 $V(t) = \frac{4}{3} \pi \{r(t)\}^3$ より、体積を求めることができる。

質量は、たとえ相対論の作用により体積増加に関わらず倍々で増え続けるのに対して、体積の増加は9時間後以降、指数関数的増加から一定の増加に転ずる。そのため、9時間後以降は密度が指数関数的に増加を始める。

〔密度は、 $den(t) = \frac{m(t)}{V(t)}$ で計算できる。〕

ブラックホールの重力半径は、 $s(t) = \frac{2G \cdot m(t)}{c^2}$ [Gは万有引力定数] で与えられるので、

ブラックホール臨界密度は、 $cd(t) = \frac{3c^2}{16\pi G \{r(t)\}^2}$ となる。

$den(t) > cd(t)$ となれば、栗まんじゅう球はブラックホール化して分裂は停止する。

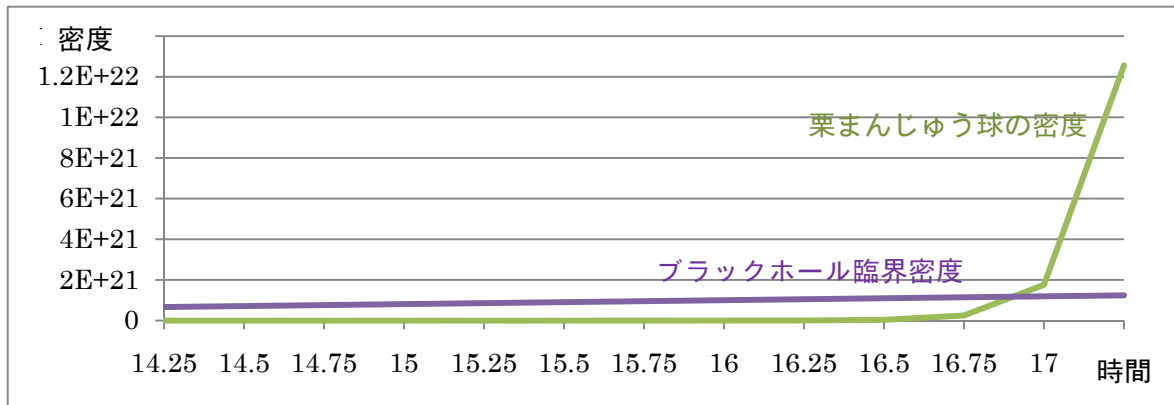


図4 栗まんじゅう球全体の密度と、それ相応のブラックホール化臨界密度

(注:密度の単位は「kg/m³」。時間の単位は「時間」のため、16.75 時間 = 16 時間 45 分)

図4のグラフのように、16時間45分頃から中心部は重力崩壊を起こし始め、ブラックホールになる。

実際には、外縁部は驚異的な速度で運動しているため、外縁部の密度は低くなり、中心部の密度は高くなると考えられる。そのため、まず中心部領域がブラックホール化する。この現象は、図4のグラフで予想されるブラックホール化の時間よりもずっと前に起きると予想される。

しかし、「栗まんじゅうが自重でつぶれる」という現象は、ブラックホール化よりももっと前に起こる。

ひとつの栗まんじゅうに、10Nの力が加わると栗まんじゅうはつぶれる。

栗まんじゅうの質量は0.05 kgなので、 $F = ma$ より、自重崩壊は栗まんじゅうの塊の重力加速度が200 m/s²となったときに起こる。

$g = \frac{G \cdot m(t)}{\{r(t)\}^2}$ より、自重崩壊が起きるのは、8時間45分後と分かる。このとき、質量は 2.0×10^{30} kg。

これは太陽質量 1.99×10^{30} kgとほぼ等しい。

一方、ドラえもんが飛ばしたロケットに、光速近くまで加速するほどの性能があるならば、栗まんじゅうも光速に近い速度で宇宙を飛び続けるが、宇宙は光速より速いスピードで膨張しているので「果て」にたどり着くことはない。

どこでもドアで栗まんじゅうを投棄するのではなく、わざわざロケットを持ち出したのはこれが理由と考えられる。

いずれにせよ、宇宙が栗まんじゅうで埋め尽くされることは無い。

脚注

※

再計算してみたところ、ブラックホール化の時間は、13時間15分後ではなく、16時間45分後になった。

参考文献

- ドラえもん てんとう虫コミックス 17巻「バイバイン」(藤子・F・不二雄 著)
- Newton 1990年10月号
- 科学技術者のための基礎数学(石原繁・矢野健太郎 著)
- Wikipedia

式の変形について

本文中では、式の変形に関しては特に断り無く行ったが、変形の途中式を以下に示す。

$$\text{※1} \quad v(t) = c \sin \left\{ \arctan \left(\frac{a \cdot 2^{\frac{t}{900}}}{c} \right) \right\} = \frac{a \cdot 2^{\frac{t}{900}}}{\sqrt{1 + \left(ac^{-1} \cdot 2^{\frac{t}{900}} \right)^2}} \text{ の証明}$$

$$\arctan \left(\frac{a \cdot 2^{\frac{t}{900}}}{c} \right) = \theta \quad \text{とおくと、} \quad \frac{a \cdot 2^{\frac{t}{900}}}{c} = \tan \theta \quad \cdots [1]$$

$$\text{よって、} \quad v(t) = c \sin \theta = c \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{\frac{1}{\cos \theta}} = \frac{c \tan \theta}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta}}} = \frac{c \tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$$

$$\text{ここで[1]より、} \quad v(t) = \frac{c \cdot \frac{a \cdot 2^{\frac{t}{900}}}{c}}{\sqrt{1 + \left(\frac{a \cdot 2^{\frac{t}{900}}}{c} \right)^2}} = \frac{a \cdot 2^{\frac{t}{900}}}{\sqrt{1 + \left(ac^{-1} \cdot 2^{\frac{t}{900}} \right)^2}}$$

$$\text{※2} \quad r(t) = \int v(t) dt = \int \frac{a \cdot 2^{\frac{t}{900}}}{\sqrt{1 + \left(ac^{-1} \cdot 2^{\frac{t}{900}} \right)^2}} dt = \frac{900c}{\ln 2} \cdot \ln \left(\frac{a \cdot 2^{\frac{t}{900}}}{c} + \sqrt{1 + \left(\frac{a \cdot 2^{\frac{t}{900}}}{c} \right)^2} \right) \text{ の証明}$$

$$ac^{-1} \cdot 2^{\frac{t}{900}} = x \quad \text{とおくと、} \quad \frac{ac^{-1} \cdot \ln 2}{900} \cdot 2^{\frac{t}{900}} dt = dx$$

$$\text{したがって、与式} = \int \frac{900}{c^{-1} \cdot \ln 2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} dx = \frac{900c}{\ln 2} \int \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} dx$$

$$\text{ここで} \quad x + \sqrt{1 + x^2} = u \quad \text{とおくと、} \quad 1 + x^2 = (u - x)^2$$

$$\text{よって} \quad x = \frac{u^2 - 1}{2u} = \frac{1}{2} \left(u - \frac{1}{u} \right) \quad \cdots [2]$$

$$\text{ゆえに} \quad dx = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{u^2} \right) du = \frac{u^2 + 1}{2u} du \quad \cdots [3]$$

$$[2] \text{より} \quad \sqrt{1 + x^2} = u - x = u - \frac{u^2 - 1}{2u} = \frac{u^2 + 1}{2u} \quad \cdots [4]$$

$$[3][4] \text{より} \quad \frac{900c}{\ln 2} \int \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} dx = \frac{900c}{\ln 2} \int \frac{2u}{u^2 + 1} \cdot \frac{u^2 + 1}{2u^2} du = \frac{900c}{\ln 2} \int \frac{1}{u} du = \frac{900c}{\ln 2} \cdot \ln |u| = \frac{900c}{\ln 2} \ln \left| x + \sqrt{1 + x^2} \right|$$

$$\text{与式} = \frac{900c}{\ln 2} \ln \left(ac^{-1} \cdot 2^{\frac{t}{900}} + \sqrt{1 + \left(ac^{-1} \cdot 2^{\frac{t}{900}} \right)^2} \right) \quad (\because x + \sqrt{1 + x^2} > 0)$$